

2 0 1 5

(May)

MATHEMATICS

(General)

Course : 601

Full Marks : 80

Pass Marks : 32

Time : 3 hours

*The figures in the margin indicate full marks
for the questions*

GROUP—A

- [(a) Abstract Algebra
(b) Elementary Statistics]

(a) Abstract Algebra

(Marks : 45)

1. (a) এটা গ্রুপৰ অভিলম্ব উপগ্রুপৰ সংজ্ঞা দিয়া। 1

Define normal subgroup of a group.

- (b) G সসীম গ্রুপৰ প্ৰত্যেক অভিলম্ব উপগ্রুপ N ৰ বাবে
 $o(G/N) = o(G)/o(N)$ হয়নে? 1

Is it true that for a finite group G and for
each normal subgroup N of G ,
 $o(G/N) = o(G)/o(N)$?

- (c) বিন্যাসত পক্ষান্তৰণ মানে কি ? 1
What is transposition in permutation?
- (d) অনুকল প্ৰভাৱক্ষেত্ৰ এবিধ বিশেষ ধৰণৰ ৰিং হয়নে ? 1
Is integral domain a special kind of ring?
2. যদি X সংহতিত $*$ এটা দ্বিবিচাৰ প্ৰক্ৰিয়া হয়, তেন্তে (i) আবদ্ধ বিধি, (ii) সংযোগ বিধি আৰু (iii) ক্ৰমবিনিময় বিধিৰ সংজ্ঞা দিয়া। 3
If $*$ is a binary composition on a set X , then define (i) closure property, (ii) associative property and (iii) commutative property.
3. উপগ্ৰুপৰ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে G গ্ৰুপৰ অশূন্য উপসংহতি H , G ৰ এটা উপগ্ৰুপ হ'ব যদি আৰু একমাত্ৰ যদি প্ৰত্যেক $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$ হয়। 1+5=6
Define subgroup. Prove that a non-void subset H of a group G is a subgroup of G if and only if for every $a, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$.
4. চক্ৰীয় গ্ৰুপৰ জেনেৰেটৰৰ উদাহৰণসহ সংজ্ঞা দিয়া। প্ৰমাণ কৰা যে চক্ৰীয় গ্ৰুপৰ যি কোনো উপগ্ৰুপ এটা চক্ৰীয় গ্ৰুপ। 2+5=7
Define generator of a cyclic group with an example. Prove that any subgroup of a cyclic group is cyclic.

অথবা / Or

এটা গ্রুপৰ কোটি মানে কি? সসীম গ্রুপৰ কোটি সসীম হয়নে? প্রমাণ কৰা যে, এটা সসীম গ্রুপৰ উপগ্রুপৰ কোটি গ্রুপটোৰ কোটিৰ এটা উৎপাদক।

7

What do you mean by order of a group? Is it true that the order of a finite group is finite? Prove that the order of any subgroup of a finite group divides the order of the group.

5. সংজ্ঞা লিখা (যি কোনো এটা) :

2

Define (any one) :

(a) হ'ম'মর্ফিজিমৰ কাৰ্ণেল

Kernel of homomorphism

(b) প্রাকৃতিক হ'ম'মর্ফিজিম

Natural homomorphism

6. যদি f , G গ্রুপৰ পৰা G' গ্রুপৰ ওপৰত হ'ম'মর্ফিজিম হয় আৰু $H = \text{কাৰ্ণেল } f$; K' এটা G' ৰ অভিলম্ব উপগ্রুপ, আৰু

$$K = \{x \in G \mid f(x) \in K'\} = f^{-1}(K')$$

হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে K , G ৰ এটা অভিলম্ব উপগ্রুপ, য'ত

$$H \subseteq K \text{ আৰু } \frac{G}{K} \cong \frac{G'}{K'}$$

5

If f is a homomorphism of a group G onto a group G' , and $H = \text{ker } f$; K' being any normal subgroup of G' , and

$$K = \{x \in G \mid f(x) \in K'\} = f^{-1}(K')$$

then prove that K is a normal subgroup of G ,

where $H \subseteq K$ and $\frac{G}{K} \cong \frac{G'}{K'}$

7. G গ্রুপৰ অট'মফিৰ্জিম মানে কি? উদাহৰণসহ ব্যাখ্যা কৰা। 2

What is automorphism of a G group? Explain with example.

8. (a) যুগ্ম বা অযুগ্ম বিন্যাস বুলিলে কি বুজা? 1

What do you mean by even or odd permutation?

- (b) কেলিৰ সূত্রটো লিখা আৰু প্রমাণ কৰা। 1+5=6

State and prove Cayley's theorem.

9. প্রমাণ কৰা যে ৰিং R ৰ সকলো উপাদান a, b ৰ বাবে

Prove that for every a, b of a ring R

$$a(-b) = (-a)b = -ab \quad 2$$

10. (a) যদি ৰিং R ৰ S এটা অশূন্য উপসংহতি হয়, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে S ; R ৰ উপৰিং হ'ব যদি আৰু একমাত্র যদি প্রত্যেক $a, b \in S$ ৰ বাবে $a-b \in S$ আৰু $ab \in S$. 4

If S is a non-void subset of a ring R , then prove that S is a subring of R if and only if $a-b \in S$ and $ab \in S$ for every $a, b \in S$.

(b) যদি (If)

$$R = \left\{ \left(\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & g \end{array} \right) \mid a, b, c, d, e, f, g \in Z \right\}$$

তেজ্জে মেট্রিক্স যোগ আৰু পূৰণৰ কাৰণে R বিং হয়নে, পৰীক্ষা কৰা।

3

then check whether R is a ring under matrix addition and multiplication.

(b) Elementary Statistics

(Marks : 35)

11. (a) যাদৃচ্ছিক পৰীক্ষাৰ পৰা পোৱা ফলাফলক কি বুলি কোৱা হয়?

1

What is the term used to mean the result of a random experiment?

(b) সহসম্বন্ধ গুণাংকৰ মান -1 আৰু $+1$ ৰ মাজত থাকে।

The value of correlation coefficient lies between -1 and $+1$.

(সত্যাসত্য বিচাৰ কৰা)

(State True or False) 1

(c) পয়চন সম্ভাৰিতা বণ্টনৰ উদ্ভাৱক

Poisson probability distribution was discovered by

(i) কাৰ্ল পি. পয়চন

Karl P. Poisson

(ii) চিমন ডি. পয়চন

Simeon D. Poisson

(iii) জেমছ বি. পয়চন

James B. Poisson

(শুদ্ধ উত্তৰটো বাছি উলিওৱা)

(Choose the corret answer) 1

12. X, Y আৰু Z য়ে এটা গাণিতিক সমস্যা সমাধান কৰিব পৰা সম্ভাৰিতা ক্ৰমে $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ আৰু $\frac{1}{4}$ যদি সমস্যাটো প্ৰত্যেককে স্বতন্ত্ৰভাৱে সমাধান কৰিবলৈ দিয়া হয়, তেন্তে সমস্যাটো সমাধান হোৱাৰ সম্ভাৰিতা কিমান ?

4

The chances of solving a mathematical problem by X, Y and Z are $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ and $\frac{1}{4}$ respectively. What is the probability that the problem will be solved, if all of them try independently?

অথবা / Or

X এ কোরা 5 টা কথাৰ ভিতৰত 4 টাহে শুদ্ধ। এটা পাশাগুটি ওপৰলৈ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। X এ ক'লে যে 6 ওপৰমুৱাকৈ আছে। X ৰ কথা শুদ্ধ হোৱাৰ সম্ভাৱিতা কিমান?

X speaks truth 4 out of 5 times. A die is toosed. X reports that there is a six facing top. What is the chance that X speaks the truth?

13. চৰ্ত-সাপেক্ষ সম্ভাৱিতা মানে কি? প্ৰমাণ কৰা যে A আৰু B ঘটনা দুটাৰ বাবে

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) P(B|A), \quad P(A) > 0 \\ &= P(B) P(A|B), \quad P(B) > 0 \end{aligned}$$

য'ত $P(B|A)$ হৈছে পূৰ্বতে ঘটি যোৱা ঘটনা A ৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি ঘটনা B ঘটিব পৰা চৰ্ত-সাপেক্ষ সম্ভাৱিতা আৰু $P(A|B)$ হৈছে পূৰ্বতে ঘটি যোৱা ঘটনা B ৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি ঘটনা A ঘটিব পৰা চৰ্ত-সাপেক্ষ সম্ভাৱিতা।

$$2+4=6$$

What is conditional probability? Prove that for two events A and B

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) P(B|A), \quad P(A) > 0 \\ &= P(B) P(A|B), \quad P(B) > 0 \end{aligned}$$

where $P(B|A)$ represents conditional probability of occurrence of B when event A has already happened and $P(A|B)$ is the conditional probability of happening of A when B has already happened.

14. 200 প্ৰাৰ্থীৰ এটা গোটৰ নম্বৰৰ মাধ্য আৰু মানক বিচলন ক্ৰমে 40 আৰু 15. কিন্তু পিছত দুজন প্ৰাৰ্থীৰ নম্বৰত আৰসোঁৱাহ দেখা গ'ল। 43 আৰু 35 নম্বৰ দুটা ভুলকৈ 34 আৰু 53 বুলি লিখা হৈছিল। শুদ্ধ মাধ্য আৰু মানক বিচলন উলিওৱা।

5

For a group of 200 candidates, the mean and standard deviation of scores were found to be 40 and 15 respectively. Later on it was discovered that the scores 43 and 35 were misread as 34 and 53 respectively. Find the correct mean and standard deviation.

অথবা / Or

দুটা সাংখ্যিকীয় তথ্যবাহিনীৰ মানক বিচলন যথাক্ৰমে 15 আৰু 18, বিচৰণ গুণাংকৰ মান হ'ল 75% আৰু 90%. তথ্যবাহিনী দুটাৰ গাণিতিক গড় নিৰ্ণয় কৰা।

Standard deviations of two series are 15 and 18, their coefficients of variation are 75% and 90% respectively. Find their arithmetic mean.

15. এখন সংগীত প্ৰতিযোগিতাত অংশগ্ৰহণ কৰা 10 জন প্ৰতিযোগীক বিচাৰক A, B আৰু Cয়ে দিয়া কোটি নিৰ্ধাৰক মানবোৰ তলত দিয়া হৈছে :

Ten competitors in a musical test were ranked by three judges A, B and C in the following order :

A ব দ্বাৰা	:	1	6	5	10	3	2	4	9	7	8
By A											
B ব দ্বাৰা	:	3	5	8	4	7	10	2	1	6	9
By B											
C ব দ্বাৰা	:	6	4	9	8	1	2	3	10	5	7
By C											

কোটি সহসম্বন্ধ প্ৰথা প্ৰয়োগ কৰি কোন দুজন বিচাৰকৰ সংগীত সম্পৰ্কে প্ৰায় সহমত আছে, আলোচনা কৰা।

6

Discuss which pair of judges has the nearest approach to common likings in music by using rank correlation method.

অথবা / Or

10 জন ছাত্ৰই এটা পৰীক্ষাত গণিত আৰু পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানত পোৱা নম্বৰ তলত দিয়া হ'ল। নম্বৰৰ এই দুটা শ্ৰেণীৰ মাজত কাৰ্ল পিয়েৰচনৰ সহসম্বন্ধ গুণাংক নিৰ্ণয় কৰা :

The following are the marks obtained by 10 students in Mathematics and Statistics in an examination. Find the Karl Pearson's coefficient of correlation of these two series of marks :

গণিতৰ নম্বৰ : 45 70 65 30 90 40 50 75 85 60

Marks of
Mathematics

পৰিসংখ্যাবিজ্ঞানৰ নম্বৰ : 35 90 70 40 95 40 60 80 80 50

Marks of
Statistics

16. দহটা মুদ্ৰা একেলগে ওপৰলৈ নিক্ষেপ কৰা হ'ল। তেন্তে কমেও সাতটা মুণ্ড পোৱাৰ সম্ভাৱিতা উলিওৱা।

2.

Ten coins are thrown simultaneously. Find the probability of getting at least seven heads.

17. (a) যদি কোনো এটা কোম্পানীয়ে উৎপাদন কৰা বিজুলী বাতিবোৰৰ 5% ত্ৰুটিযুক্ত হয়, তেন্তে 100 টা বিজুলীবাতি থকা প্ৰতিদৰ্শ এটাত (i) 3 টা ত্ৰুটিযুক্ত বিজুলীবাতি থকা, (ii) এটাও ত্ৰুটিযুক্ত বিজুলীবাতি নথকাৰ সম্ভাৱিতা নিৰ্ণয় কৰা। (দিয়া আছে, $e^{-5} = 0.007$).

3

If 5% of the electric bulbs manufactured by a company are defective, find the probability that in a sample of 100 bulbs (i) 3 bulbs are defective and (ii) none is defective. (Given, $e^{-5} = 0.007$)

- (b) X প্ৰসামান্যভাৱে বিভাজিত এটা চলক, ইয়াৰ মাধ্য আৰু মানক বিচলন ক্ৰমে 30 আৰু 5. তেন্তে সম্ভাৱিতা উলিওৱা, যাতে—

X is a normal variate with mean 30 and standard deviation 5. Find the probabilities that—

- (i) $26 \leq X \leq 40$;
(ii) $X \geq 45$;
(iii) $|X - 30| > 5$.

2+2+2=6

GROUP—B

[(a) Discrete Mathematics
(b) Metric Space]

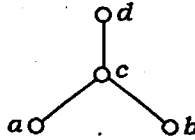
(a) Discrete Mathematics

(Marks : 45)

1. (a) দুটা উক্তিৰ সংযোগ (conjunction) কেতিয়া সত্য হয়? 1
When is the conjunction of two propositions true?
- (b) $p \wedge q$ ক অস্বীকাৰ কৰা উক্তিটো লিখা। 1
Write the denial of $p \wedge q$.
- (c) সম্পূৰ্ণ ক্ৰমবিন্যাসযুক্ত এটা সংহতিৰ উদাহৰণ দিয়া। 1
Give one example of a totally ordered set.
- (d) তলৰ উক্তিটোৰ দ্বৈত উক্তিটো লিখা : 1
Write dual of the following statement :
 $a \cdot [b + c \cdot d]$
2. (a) যদি Ex এ 'x এটা যুগ্ম সংখ্যা' আৰু Dxy এ 'y, x ৰে বিভাজ্য' বুজায়, তেন্তে তলৰ উক্তিটোক ভাষা ৰূপত অনুবাদ কৰা : 2
Let 'x be even' in Ex and Dxy be 'x divides y', then translate the following into language form :
 $(x)(\neg Ex \rightarrow \neg D2x)$

- (b) তলত দিয়া চিত্ৰটো 'লেটিছ' হয়নে? তোমাৰ উত্তৰৰ যুক্তি নিৰ্দেশ কৰা : 1+1=2

Does the following diagram represent a lattice? Give reason for your answer :



- (c) দেখুওৱা যে 3 টা উপাদান থকা 'চেইন', 'বুলিয়ান এলজেব্ৰা' নহয়। 2

Show that a chain with 3 elements is not a Boolean algebra.

- (d) যদি $\models A$ আৰু $\models A \rightarrow B$ হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে $\models B$. 3

If $\models A$ and $\models A \rightarrow B$, then prove that $\models B$.

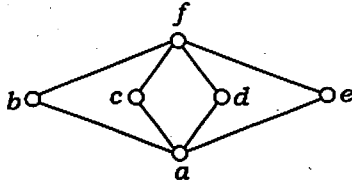
- (e) $abc + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc$ ক ইয়াৰ 'Karnaugh map'ৰে বৰ্ণনা কৰা। 3

Represent $abc + ab\bar{c} + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc$ by its Karnaugh map.

- (f) তলত দিয়া 'লেটিচ'টো পূৰক কিন্তু বিভাজক নহয়, প্রমাণ কৰা :

3

Prove that the lattice given below is complemented but not a distributive lattice :



3. (a) $p \vee q \rightarrow r$ উক্তিটোৰ সত্যতা নিৰূপণ সাৰণি (truth table) প্রস্তুত কৰা আৰু ইয়াৰ পৰা উক্তিটো চিৰসত্য (tautology) হয় নে নহয়, নিৰ্ধাৰণ কৰা।

4

Construct the truth table for $p \vee q \rightarrow r$ and hence determine whether it is a tautology or not.

- (b) (L, \vee, \wedge) এটা বিভাজক 'লেটিচ' আৰু $x, y, z \in L$ হ'লে, প্রমাণ কৰা যে

Let (L, \vee, \wedge) be a distributive lattice and $x, y, z \in L$, then prove that

$$x \wedge y = x \wedge z, x \vee y = x \vee z \Rightarrow y = z$$

6

অথবা / Or

দেখুওৱা যে

Show that

$$\overline{[x_1(\overline{x_2 + x_3})]} \overline{[\overline{x_2} + (x_1 \overline{x_3})]} = x_1 x_2 \overline{x_3}$$

- (c) প্রমাণ কৰা যে
Prove that

$$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \sim p \vee q$$

5

- (d) অনুসিদ্ধান্তৰ সূত্রবোৰ ব্যৱহাৰ কৰি তলৰ যুক্তিৰ বৈধতা পৰীক্ষা কৰা। বন্ধনীৰ ভিতৰত দিয়া প্ৰতীকবোৰ ব্যৱহাৰ কৰিবা :

দৰমহা (W) বৃদ্ধি হ'ব যদিহে মুদ্রাস্ফীতি (I) হয়। যদি মুদ্রাস্ফীতি হয়, তেনেহ'লে জীৱনধাৰণৰ ব্যয় বৃদ্ধি হ'ব। দৰমহা (W) বাঢ়িব, অর্থাৎ জীৱনধাৰণৰ ব্যয় (C) বাঢ়িব।

6

Using the rules of inference examine the validity of the arguments using the letters given within the brackets for symbolizing the arguments :

Wages (W) will increase only if there is inflation (I). If there is inflation, then the cost of living will increase. Wages (W) will increase therefore, cost of living (C) will increase.

- (e) এটা ফলন $f : A \rightarrow B$, য'ত A আৰু B দুটা 'বুলিয়ান এলজেব্ৰা'। দেখুওৱা যে f এটা 'বুলিয়ান এলজেব্ৰা হ'ম'মৰ্ফিজম' হ'ব, যদি

A function $f : A \rightarrow B$, where A and B are two Boolean algebras. Show that f is Boolean algebra homomorphism, if

$$f(a \vee b) = f(a) + f(b)$$

$$f(a') = \overline{f(a)}$$

5

(b) Metric Space

(Marks : 35)

4. (a) বাস্তৱ সংখ্যাৰ সাধাৰণ (usual) মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰ \mathbb{R} ত মুক্ত গোলকৰ (open sphere) $S_r(x_0)$, য'ত $x_0 = \frac{1}{2}$ আৰু $r = 1$ সংজ্ঞা দিয়া। 1

In the usual metric space \mathbb{R} define the open sphere $S_r(x_0)$ with $x_0 = \frac{1}{2}$ and $r = 1$.

- (b) মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰত সীমিত অনুক্ৰম কি? 1

What is a bounded sequence in a metric space?

- (c) সম্পূৰ্ণ মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰৰ এটা উদাহৰণ দিয়া। 1

Give an example of a complete metric space.

- (d) এটা মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰৰ পৰা আৰু এটা মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰলৈ 'হ'ম'মৰ্ফিজম' বুলিলে কি বুজা? 1

What is meant by a homomorphism from a metric space to another metric space?

5. (a) প্রমাণ কৰা যে মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰত এটা উপসংহতিৰ 'ক্লোজাৰ' সদায় এটা বন্ধ সংহতি। 3

Prove that the closure of a subset in a metric space is a closed set.

- (b) যি কোনো মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰত প্রতিটো মুক্ত গোলক এটা মুক্ত সংহতি। প্রমাণ কৰা। 4

In any metric space, prove that every open sphere is an open set.

- (c) $X =]0, 1]$ মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰ (সাধাৰণ) আৰু $\{x_n\}$ এটা X ৰ অনুক্রম, য'ত $x_n = \frac{1}{n}$. প্রমাণ কৰা যে $\{x_n\}$ 'কচি' অনুক্রম কিন্তু X ত অভিসাৰী নহয়। 4

Let $X =]0, 1]$ be the metric space with usual metric and $\{x_n\}$ be a sequence in X , where $x_n = \frac{1}{n}$. Prove that $\{x_n\}$ is a Cauchy sequence but does not converge in X .

অথবা / Or

প্রমাণ কৰা যে এটা মেট্ৰিক ক্ষেত্ৰত প্রতিটো অভিসাৰী অনুক্রমৰ এটা অধিতীয় সীমা থাকে।

Prove that in a metric space every convergent sequence has a unique limit.

- (d) (X, d_1) আৰু (Y, d_2) দুটা মেট্ৰিক স্পেচ আৰু $f : X \rightarrow Y$ এটা ফলন। প্রমাণ কৰা যে f অনবিচ্ছিন্ন হ'ব যদি $f^{-1}(G)$, X ত মুক্ত হয়, যেতিয়া G , Y ত মুক্ত।

6

Let (X, d_1) and (Y, d_2) be metric spaces and $f : X \rightarrow Y$ be a function. Prove that f is continuous if $f^{-1}(G)$ is open in X , whenever G is open in Y .

6. (a) প্রমাণ কৰা যে যদি (X, d) এটা মেট্ৰিক স্পেচ হয় আৰু $d^* : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, য'ত

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$$

তেলে d^* , X ত মেট্ৰিক হ'ব।

5

Prove that if (X, d) is a metric space, then $d^* : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, defined by

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \quad \forall x, y \in X$$

then d^* , is also a metric on X .

- (b) যদি E সংহতিটোৰ বাবে p এটা সীমাবিন্দু (limit point) হয়, তেলে প্রমাণ কৰা যে p ৰ প্রতিটো 'নৈবাৰহুড'ত E ৰ অসীম সংখ্যক বিন্দু থাকিব।

4

Prove that if p is a limit point of a set E , then every neighbourhood of p contains infinitely many points of E .

অথবা / Or

সংজ্ঞা লিখা (যি কোনো দুটা) :

2×2=4

Define (any two) :

(i) মেট্রিক ক্ষেত্রৰ পূৰণ

Product metric space

(ii) সমতুল মেট্রিক

Equivalent metrics

(iii) মেট্রিক ক্ষেত্রৰ উপক্ষেত্র

Subspace of a metric space

(c) (X, d) সম্পূর্ণ মেট্রিক ক্ষেত্র আৰু (Y, d_y) ইয়াৰ এটা উপক্ষেত্র, তেন্তে প্রমাণ কৰা যে

$$Y \text{ বন্ধ} \Rightarrow Y \text{ এটা সম্পূর্ণ ক্ষেত্র}$$

5

Let (X, d) be a complete metric space and (Y, d_y) be a subspace of (X, d) . Then prove that

$$Y \text{ is closed} \Rightarrow Y \text{ is complete}$$

অথবা / Or

ধরা $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, য'ত $f(x) = x^2$ আৰু \mathbb{R}
'ইউক্লিয়াল' মেট্ৰিক স্পেচ। দেখুওৱা যে f সমৰূপভাৱে
অনবিচ্ছিন্ন (uniformly continuous) নহয়।

Prove that the mapping $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ define
by $f(x) = x^2$ is not uniformly continuous
where \mathbb{R} is the usual metric space.
